数理解析研究所講究録
1066 巻 1998 年 37-44

ダイナミカルエントロピーを用いた熱力学的変分原理

守屋創
京都大学数理解析研究所

1 要旨

Connes,Narnhofer,Thirring は 1987 年に Kolmogorov-Sinai らの Dynamical entropy を非可換に拡張する C.N.T. エントロピーを定義した。その最初の論文の中で C.N.T. ダイナミカルエントロピーを用いた変分原理から熱平衡状態の特徴付けが可能ではないかという予想をたてている。この小論では極めて一般的な条件で彼らの予想が解決されたことを報告する。

2 はじめに

Kolmogorov-Sinai(K-S) エントロピーの非可換への拡張には種々の観点から異なった定義が提案されてきた ([3],[13]) 。今回はその中のひとつであり、数学的な構造が深く研究されている Connes,Narnhofer,Thirring らによる C.N.T. ダイナミカルエントロピーを取り上げ、その量子統計力学の数学的な基礎付けへの応用をのべる。C.N.T. エントロピーは確率空間上の一径数保測変換群に対する K-S エントロピーを C^* 環上の一径数自己同型群とその不変状態へと定義を拡張している。正確には考えている C^* 環は核型と呼ばれるものでもので、物理的に自然なものはこの中にはいるといってよい。例えば以下考える格子スピンモデルでは A.F.D.C^* 環をとる。

ダイナミカルエントロピーは保測変換の不変量であり、同型の決定の研究が現在まで中心課題として発展してきている。Connes,Narnhofer,Thirring は数学者、数理物理学者の立場から上記の同型問題の他にもダイナミカルエントロピーの有用性をその最初の論文である [5], や同年の講義録 [6] でいくつか説明している。

特に数理物理の解決すべき問題として熱力学エントロピーとシフトに対するダイナミカルエントロピーの関連を挙げていている。具体的予想問題としては以下の二つがある。

1. 格子スピン系において、シフト不変な平衡状態を自由エネルギー最小状態として変分原理を用いて定式化しているが、その際エントロピー密度をシフトのダイナミカルエントロピーに置き換えることができないだろうか?

2. エントロピー密度とシフトのダイナミカルエントロピーが同じ値をとる シフト不変状態としていかなるものがあるか?

本稿は 1. を肯定的に解決したのでその証明の概略をのべる。2. については最後の章でふれる。Connes,Narnhofer,Thirring の定義ではアーベリアンモデルなるものを考え von-Neumann エントロピーからエントロピー Defect を引いた Algebraic エントロピーを使って体積無限大をとっている。よってこの二つのエントロピーの比較が証明のポイントである。

尚、なぜ素朴に von-Neumann エントロピーが使えないかは非可換に K-S エントロピーを拡張することの数学的、さらには概念的な意味づけの困難さの顕れであり、そのあたりの事情は彼らの先に挙げた講義録 [6] に詳しい。

3 格子スピン系

我々が扱うモデルは格子スピン系である。定義、用語を準備し熱平衡状態の定式化をのべる。教科書として [4] を、また日本語のものとして [2] をあげる。後者は古典スピン系のみであるが、今回は冨田 ● 竹崎理論などの KMS 条件を特徴づける作用素環における理論は必要でなく熱力学的な考察は古典スピンの場合のもので本質はつきているといえる。（詳しくは証明の中で述べる。）

ν 次元格子 $\mathbf{Z}^\nu$ に於いて、各格子点 $x \in \mathbf{Z}^\nu$ に有限次元 C^*algebra $\mathcal{A}_x$ をとる。ここでそれぞれの $\mathcal{A}_x$ は $M_d(\mathbf{C})$ と $*$ 同型であるとする (d はある自然数) 。$\mathbf{Z}^\nu$ の有限集合 Λ に対し $\mathcal{A}_\Lambda \equiv \otimes_{x\in\Lambda}\mathcal{A}_x$ とし、Λ に関する局所 C^* 代数と呼ぶ。$\mathbf{Z}^\nu$ の有限集合の全体を $P_f(\mathbf{Z}^\nu)$ で表し、$\Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \equiv \{k \in \Lambda_2, k \notin \Lambda_1\}$ とおく。$\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ の時 $\mathcal{A}_{\Lambda_2} = \mathcal{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$ であり、 $j_{\Lambda_2\Lambda_1}(A) \equiv A\otimes \mathrm{I}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$ ($\forall$A$\in \mathcal{A}_{\Lambda_1}$, I_Λ は $\mathcal{A}_\Lambda$ の単位元) で定義される $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ から $\mathcal{A}_{\Lambda_2}$ への埋め込みが存在し $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ と $\mathcal{A}_{\Lambda_1}\otimes \mathrm{I}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$ は同一視する。

$\{\mathcal{A}_\Lambda; \Lambda \in P_f(\mathbf{Z}^\nu)\}$ は増大列とみなすことができ、$\mathcal{A}_\circ \equiv \bigcup_{\Lambda\in P_f(\mathbf{Z}^\nu)}\mathcal{A}_\Lambda$ はノルム $*$ 代数でこれを完備化した局所 C^* 代数を $\mathcal{A}$ とおく。

写像 $\Phi : \Lambda \in P_f(\mathbf{Z}^\nu) \mapsto \Phi(\Lambda) \in \mathcal{A}_\Lambda$ が $\Phi(\Lambda) = \Phi(\Lambda)^*$ である時、Φ を相互作用ポテンシャルとよぶ。我々は Φ として $\mathbf{Z}^\nu$ のシフトに対し不変なものをとり、かつ以下のような条件を課す。

$$(4)\ \|\Phi\|_\circ \equiv \sum_{\Lambda\ni 0} \frac{\|\Phi(\Lambda)\|}{|\Lambda|} < \infty.$$

上記のノルムでの実 Banach 空間を $\mathcal{B}_0$ と記す。なおこの $\mathcal{B}_0$ は最も広いバナッハ空間といえる。(Narnhofer の設定はもっと限定されたポテンシャルであった (後述))

内部エネルギーは各 $\Lambda \in P_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対し

$$U_\Lambda \equiv \sum_{X\subseteq\Lambda} \Phi(X).$$

で与えられる。$\Phi \in \mathcal{B}_\circ$ に対して

$$A_\Phi \equiv \sum_{\Lambda\ni 0} \frac{\Phi(\Lambda)}{|\Lambda|}$$

とし定義より A_Φ は Φ に対して実線形で以下の評価がすぐわかる。

$$\|A_\Phi\| \leq \|\Phi\|_\circ.$$

Tr_Λ で $\mathcal{A}_\Lambda$ 上の "カノニカル" なトレースを表す。カノニカルとは各一次元射影子に対し値 1 をとるという意味である。 各有限系 Λ での分配函数と圧力函数はそれぞれ以下のように与える。

$$Z_\Lambda(\beta\Phi) \equiv \mathrm{Tr}_\Lambda\left(e^{-\beta U_\Lambda}\right),$$
$$P_\Lambda(\beta\Phi) \equiv \frac{\log Z_\Lambda(\beta\Phi)}{|\Lambda|}.$$

体積無限大の圧力函数の存在、ポテンシャルに対する連続性と凸性が証明されている。

$$(i)\qquad P(\beta\Phi) \equiv \mathrm{v.H.}\lim_{\Lambda\mapsto\mathbf{Z}^\nu} P_\Lambda(\beta\Phi),$$
$$(ii)\qquad |P(\Phi - \Psi)| \leq \|\Phi - \Psi\|_\circ,$$
$$(iii)\qquad P(\lambda\Phi + (1-\lambda)\Psi) \leq \lambda P(\Phi) + (1-\lambda)P(\Psi)\quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

この $P(\beta\Phi)$ を逆温度 β での Φ に対する熱力学的圧力函数と呼ぶ。$\mathcal{A}^*_{+,1}$、$\mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ で $\mathcal{A}$ 上の状態全体、シフト不変な状態全体を表すとする。

無限系の状態 $\omega \in \mathcal{A}^*_{+,1}$ を有限領域 Λ に制限したものを ω_Λ と書き、ここでのエネルギー、エントロピーは

$$\begin{aligned} E_\Lambda(\omega) &= \omega(U_\Lambda), \\ S_\Lambda(\omega) &\equiv -\mathrm{Tr}_\Lambda D_\Lambda \log D_\Lambda, \end{aligned}$$

で与えられる。ここで D_Λ は ω_Λ に対応する密度行列である。
$\omega \in \mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ に対してはエネルギー密度、エントロピー密度の存在が証明されている。

$$e_\Phi(\omega) \equiv \lim_{\Lambda\to\mathbf{Z}^\nu} \frac{E_\Lambda(\omega)}{|\Lambda|} = \omega(\mathcal{A}_\Phi), \quad s(\omega) \equiv \lim_{\Lambda\to\mathbf{Z}^\nu} \frac{S_\Lambda(\omega)}{|\Lambda|}.$$

エントロピー密度の存在はシフト不変という仮定と強劣加法性より導かれる。そして

$$\omega \in \mathcal{A}^*_{+,1,inv} \to s(\omega)$$

は上半 weak∗ 連続なアフィン関数である。無限系である格子スピンモデルでのシフト不変な平衡状態の定式化には以下の「Gibbs の変分原理」が重要である。

Fact 1 (Gibbs の変分原理、Ruelle[16],Robinson[15])

$$P(\beta\Phi) = sup_{\omega\in\mathcal{A}^*_{+,1,inv}}[s(\omega) - \beta\cdot e_\Phi(\omega)].$$

熱平衡状態を「Gibbs の変分原理」の解、すなわち自由エネルギー（圧力函数を逆温度定数で割りマイナスをつけたもの）最小状態として定式化する。

Definition 2 (平行移動不変な平衡状態) ρ が $\in \mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ が変分原理の解である時、すなわち

$$P(\beta\Phi) = s(\rho) - \beta\cdot e_\Phi(\rho),$$

を満たす時 ρ を Φ に対する逆温度 β での平衡状態といい平衡状態全体を $I_{\beta\Phi}$ で表す。

今回は上記の「Gibbs の変分原理」のなかでのエントロピー密度 $s(\omega)$ をシフトのダイナミカルエントロピー $h_\omega(G(\vec{\sigma}))$（次節参照）に換えても同じ値をとることを示す。

Theorem 1 (主要結果)

$$P(\beta\Phi) = sup_{\omega\in\mathcal{A}^*_{+,1,inv}}[h_\omega(G(\vec{\sigma})) - e_\Phi(\omega)].$$

上記の結果と同じものを H.Narnhofer が自分たちの重要な Conjecture の一つを解決したとして、[10] に発表している。Narnhofer の設定はそもそも我々のものより条件がきつく、指数的に減少するポテンシャル、すなわち ある正数 $r > 0$ で

$$\|\Phi\|_r \equiv \sum_{\Lambda\ni 0} e^{r|\Lambda|}\|\Phi(\Lambda)\| < \infty,$$

を満たすものを考慮している。この条件は $\mathcal{A}$ 上の強連続な 1 径数自己同型群の存在を保証する十分条件の一つであり、Narnhofer の証明にはそれが決定的にきいている。（平衡状態は $\mathcal{A}$ に時間発展の存在を仮定した場合 KMS 状態と同値なことが知られている。さらに KMS 条件と同

値な種々の条件があり、その中の荒木-Roepstroff 条件を用いている [1],[4]。） Narnhofer の証明は極めて込み入っており、明らかな間違いや論理的な飛躍が散見される。我々は今回ダイナミカルエントロピーの基本的性質のみをもちいれば、通常の Ruelle や Robinson らによる Gibbs 変分原理と同様な証明が出来ることを示す。

ここではエントロピーとダイナミカルエントロピーが平衡状態において同じ自由エネルギー最小値をとるかどうかについては言っていないことに注意されたい。sup の値が一致することを述べている。

最後に熱力学エントロピーとダイナミカルエントロピーの意味の相違に触れる。熱力学的エントロピーとは単位体積あたりエントロピーであり、無限に発散する有限体積列をつくりそれぞれの有限系でのエントロピーを平均化することを意味する。ここにおいてその無限列は van Hove limit を取っている。

シフトのダイナミカルエントロピーは言うなれば体積無限大を取るということをプロセスと考え、体積を増やすときに状態の情報量がどうふえるかをしめす量と考えることができる。

このアイデアについての説明には [6]、具体的な定義、考察は [8] を参照。

4 多次元の C.N.T. エントロピー

この章では C.N.T. エントロピーを一つの自己同型群から互いに可換な有限個の自己同型群へ拡張した Hudetz による定義をのべる [8]。Hudetz による拡張も中心となるアイデアは [5] と同様 "アーベリアンモデル" である。アーベリアンモデルに対応する測定のもとで全体の可換エントロピーから着目する有限個の部分系のエントロピー defect の総和を引いた値を取る。そして "アーベリアンモデル" を動かしたときの sup でエントロピー $H_\psi(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$, $(\gamma_i \in CP_1(\mathcal{A}))$ をあたえる。

C.N.T. エントロピーを計算するときには "最適なアーベリアンモデル" は何かを見つけるのが常に問題であり、ここが難しい部分である。今回の我々の証明はその部分で悩まないような工夫がされていて、アーベリアンモデルのところで凄まじい計算をしている Narnhofer 先生の証明と根本的に異なっている。アーベリアンモデルの詳しい定義は [5] を参照していただき、今回は $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Z}^\nu$ への拡張するところに説明を割くことにする。

$G(\vec{\theta})$ で互いに可換な ν 個の自己同型群 $\{\theta_1,\cdots,\theta_\nu\}$ からなる群とする。$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_\nu)\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して $\theta_{\vec{x}}\equiv(\theta_1)^{x_1}\circ\cdots\circ(\theta_\nu)^{x_\nu}$、$CP_1(\mathcal{A})$ で有限次元 C*-algebra から $\mathcal{A}$ への完全正単位写像全体を、$\mathcal{F}$ で $CP_1(\mathcal{A})$ の元を要素として持つ有限集合全体を表す。いま $X=\{\gamma_1,\cdots\gamma_m\},\gamma_i\in CP_1(\mathcal{A})$ なる $X\in\mathcal{F}$ をとる。有限部分集合 Λ に対して以下を定義

$$X_\Lambda(\vec{\theta})\equiv\bigcup_{x\in\Lambda}\bigcup_{j=1}^{m}\theta_{\vec{x}}\circ\gamma_j\in\mathcal{F}.$$

$\vec{k}\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して $\Lambda_0(\vec{k})\equiv\{x\in\mathbf{Z}^\nu : 0\le x_i lek_i-1\}$、そして $\{\Lambda_o(\overrightarrow{k_n})\}_n$ を $\Lambda_o(\overrightarrow{k_n})\nearrow\mathbf{N}^\nu$ $(n\mapsto\infty)$ なる単調増大な平行 ν 次元体列とする。単純のために $\Lambda_o(\overrightarrow{k_n})$ にかわって $\Lambda_{o,n}$ という記号をつかう。すると上の定義にしたがって各 $\Lambda_{o,n}$ にたいし $X_{\Lambda_{o,n}}(\vec{\theta})\in\mathcal{F}$ が定まる。まず以下の極限が下極限として得られ

$$h_{\psi,G(\vec{\theta})}(X)=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{|\Lambda_{o,n}|}H_\psi\left(X_{\Lambda_{o,n}}(\vec{\theta})\right).$$

$G(\vec{\theta})$ 不変な ψ に対する C.N.T. ダイナミカルエントロピーは

$$h_\psi(G(\vec{\theta}))=\sup_{X\in\mathcal{F}}h_{\psi,G(\vec{\theta})}(X)$$

で与えられる。

5 証明の概略

任意の $\omega \in \mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ をとる。Gibbs 不等式より

$$P(\Phi) \geq s(\omega) - e_\Phi(\omega)$$

エントロピー密度は常にシフトのダイナミカルエントロピーより大きい [5] から

$$P(\Phi) \geq h_\omega(G(\vec{\sigma})) - e_\Phi(\omega). \tag{1}$$

したがって我々は反対の不等式をしめすために、任意の正数 ε に対して $h_{\rho_\varepsilon}(G(\vec{\sigma})) - e_\Phi(\rho_\varepsilon) \geq P(\Phi) - \varepsilon$ をみたす ρ_ε を構成してやればよろしい。任意の $\Lambda \in P_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して外系との相関を切った Gibbs 状態は

$$\varphi^c_\Lambda(A) \equiv \frac{\mathrm{Tr}_\Lambda A e^{-U_\Lambda}}{\mathrm{Tr}_\Lambda e^{-U_\Lambda}} \quad (A \in \mathcal{A}_\Lambda).$$

で与えられ Λ における Local Gibbs 状態と呼ぶ。原点を最小の角として持つ一辺 a の ν 次元立方体 $\Lambda_\circ(a) = \{x \in \mathbf{Z}^\nu; 0 \leq x_i \leq a-1, i = 1, \cdots \nu\}$ をとる。つぎに $\Lambda_\circ(a)$ での Local Gibbs 状態を無限にテンソル積させて、各次元 a- 周期的な状態

$$\varphi^c_a \equiv \otimes_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^\nu} \sigma^*_{a\vec{n}} \varphi^c_{\Lambda_\circ(a)} \in \mathcal{A}^*_{+,1,a-inv}$$

を定義する。ここで $\sigma^*_{\vec{m}}\omega(A) = \omega(\sigma_{\vec{m}}A)$ であり、$\mathcal{A}^*_{+,1,a-inv}$ で a- シフト不変な状態全体を表すとする。さらに $\Lambda_\circ(a)$ で平均化してシフト不変な状態をつくる。すなわち

$$\widehat{\varphi^c_a} \equiv \sum_{\vec{n} \in \Lambda_\circ(a)} \frac{\sigma^*_{\vec{n}} \varphi^c_a}{|\Lambda_\circ(a)|} \in \mathcal{A}^*_{+,1,inv}.$$

まずわれわれはエネルギーの項に対して以下の結果をえる。

Lemma 2

$$\lim_{a \mapsto \infty} e_\Phi(\widehat{\varphi^c_a}) - |\Lambda_\circ(a)|^{-1} \varphi^c_{\Lambda_\circ(a)}\left(U_{\Lambda_\circ(a)}\right) = 0$$

続いてダイナミカルエントロピーの評価を行なう。$G_{a^\nu}(\vec{\sigma})$ を $\vec{\sigma}^a_1, \cdots \vec{\sigma}^a_\nu$ で生成される $G(\vec{\sigma})$ の部分群とする。定義から 任意の $\vec{n}$ で $\sigma^*_{\vec{n}}\varphi^c_a \in \mathcal{A}^*_{+,1,a-inv}$ 、よって $h_{\sigma^*_{\vec{n}}\varphi^c_a}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma}))$ を考えうる。単位時間に対するスケーリング性、状態に対するアフィン性から

$$\begin{aligned} & h_{\widehat{\varphi^c_a}}(G(\vec{\sigma})) \\ = \ & \frac{1}{a^\nu} h_{\widehat{\varphi^c_a}}(\vec{\sigma^a}) \\ = \ & \frac{1}{a^\nu} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_\circ(a)} \frac{1}{|\Lambda_\circ(a)|} h_{\sigma^*_{\vec{n}}\varphi^c_a}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma})). \end{aligned} \tag{2}$$

ダイナミカルエントロピーの同型不変性から

$$h_{\sigma^*_{\vec{n}}\varphi^c_a}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma})) = h_{\varphi^c_a}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma})). \tag{3}$$

上式 (2) と (3) を合わせると

$$h_{\widehat{\varphi^c_a}}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma})) = \frac{1}{a^\nu} h_{\varphi^c_a}(G_{a^\nu}(\vec{\sigma})) \tag{4}$$

$$\geq \frac{1}{a^\nu} h_{\varphi^c_a, G_{a^\nu}(\vec{\sigma})}(\mathcal{A}_{\Lambda_\circ(a)}), \tag{5}$$

上の不等式は定義からくる。φ_a^c は有限系での状態を無限個テンソル積した product state であるから、エントロピー defect が消えるアーベリアンモデルがとれる。したがって Algebraic エントロピーは von-Newmann エントロピーと一致して、

$$\frac{1}{a^\nu} h_{\varphi_a^c, G_{a^\nu}(\vec{\sigma})}(\mathcal{A}_{\Lambda_\circ(a)}) = \frac{S_{\Lambda_\circ(a)}(\varphi^c_{\Lambda_\circ(a)})}{|\Lambda_\circ(a)|}. \tag{6}$$

以上よりシフトのダイナミカルエントロピーを下から評価する式が得られ

$$h_{\widehat{\varphi_a^c}}(G(\vec{\sigma})) \geq \frac{S_{\Lambda_\circ(a)}(\varphi^c_{\Lambda_\circ(a)})}{|\Lambda_\circ(a)|}. \tag{7}$$

lemma 2 と熱力学的圧力函数の存在から、$\varepsilon > 0$ に対し

$$|P(\Phi) - P_{\Lambda_\circ(a)}(\Phi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

$$\left| e_\Phi(\widehat{\varphi_a^c}) - |\Lambda_\circ(a)|^{-1} \varphi^c_{\Lambda_\circ(a)}\left(U_{\Lambda_\circ(a)}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

の両不等式をみたすような a が存在する。また以下の恒等式に注意する。

$$P_{\Lambda_\circ(a)}(\Phi) = \frac{S_{\Lambda_\circ(a)}(\varphi^c_{\Lambda_\circ(a)})}{|\Lambda_\circ(a)|} - |\Lambda_\circ(a)|^{-1} \varphi^c_{\Lambda_\circ(a)}\left(U_{\Lambda_\circ(a)}\right). \tag{10}$$

(7) (8) , (9) , そして (10) を合わせて

$$P(\Phi) \leq h_{\widehat{\varphi_a^c}}(G(\vec{\sigma})) - e_\Phi(\widehat{\varphi_a^c}) + \varepsilon, \tag{11}$$

を得た。以上で題意は証明された。 □

6 考察

この章では初めにあげた Connes,Narnhofer,Thirring の 2 の問題、すなわち $s(\omega) = h_\omega(G(\vec{\sigma}))$ である状態 ω は何か？ 成立しない反例はあるのか？ についての考察をおこなう。とりあえず今のところ反例はみつかっていない。また成立させる例としては平行移動不変なマルコフ状態（詳しくいえば Generalized Markov state でも良い）[14] がある。マルコフ状態はいわば相関が有限なところで構成されていき、その点で交わりのない領域で独立になる Product 状態に近いといえる。よって状態の分解をあたえるアーベリアンモデルも具体的に構成できる。ところが一般の平行移動不変状態ではそうはいかない。Narnhofer,Thirring は 1 次元有限距離の Φ に対し一意にきまる KMS 状態にたいし上記等号が成立すると [12] で主張しているが彼らの議論には重大な不備がある。（例えば [13] でも指摘されている。）有限温度での KMS 状態はマルコフ状態とは深い溝があると思われる。即ちたとえ領域に対する Cluster 性があったとしてもマルコフ状態のような Correlation の減り方とは根本的に違うものであろう。

そもそも状態のアーベリアンモデルをとることは与えられたそれの分割をとることと同値である。それは量子状態がいかに pure か mixed かと関連する。もし $\omega \in \mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ が $A^*_{+,1}$ の中で自明な分割しかもたないならば（これを pure と呼ぶ）C.N.T. エントロピーの定義からただちに $h_\omega(G(\vec{\sigma})) = 0$ である。ところが $s(\omega) = 0$ かどうかは一般には不明である。マルコフ状態のバリエーションである Finitely Correlated state ならばシフト不変な pure state のエントロピー密度が消えることは証明されている [7]。しかし一般に量子状態のエントロピーには単調性がなく小

さい領域のエントロピーが大きい領域のエントロピーより大きい例が有限次元の場合簡単に例がつくれる（例えば [13]）。無限次元 $\mathcal{A}$ 上の pure state が各有限系でどのようなエントロピーをとり、密度をとったときいつも 0 をとるのか、そうでない例があるのか難しい問題だと思える。

上記の問題は C.N.T. エントロピーが固定した一つの自己同型群に対してそれを不変にする状態に対し上半 weak∗ 連続性があるのかということと同じである。この問題は C.N.T. エントロピーの定義された時以来から以前未解決である [12]。もしそうならば、ルジャンドル逆変換から一般の $\omega \in I_{\beta\Phi}$ で $s(\omega) = h_\omega(G(\vec{\sigma}))$ である。さらにいえばここでの証明と同様の手法をもちいることですべての $\mathcal{A}^*_{+,1,inv}$ の元で上記等号が成立する。

謝辞:
統計物理学の数理的な基礎付けについて荒木不二洋先生より御指導を賜わり、また論文を詳細にみていただきました。長田 まりゑ、日合文雄、松井卓、B.Nachtergaele、D.Petz 先生とは数々の有益な数学的な議論をさしていただきました。大矢雅則、小嶋泉先生からは C.N.T. エントロピーに限らないチャンネルの概念の汎用性について教えていただきました。また豊田利幸先生より情報エントロピーの概念がいかに創られたか教えていただきました。

参考文献

[1] H.Araki, On KMS states of a C^*dynamical system, Lecture Notes in Math. **650**(1978), 66–84.

[2] H.Araki, 統計物理の数理, 岩波講座 応用数学,1994.

[3] F. Benatti *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Trieste Notes in Physics, Springer, 1993.

[4] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II, 2nd edition*, Springer, 1997.

[5] A.Connes, H.Narnhofer, and W.Thirring, Dynamical Entropy of **C***Algebras and von Neumann Algebras, *Comm. Math. Phys.* **112**(1987), 691-719.

[6] A.Connes, H.Narnhofer, and W.Thirring, The Dynamical Entropy of Quantum Systems *Recent developments in Mathematical Physics*, (ed.H.Mitter and L.Pittner), Springer, 1987, 102-136.

[7] M.Fannes,B.Nachtergaele and R.F.Werner, Finitely Correlated Pure States *J.Functional.Anal* **120**(1994), 511-534.

[8] T.Hudetz, Spacetime Dynamical Entropy of Quantum Systems, *Lett. Math. Phys.* **16**(1988), 151-161.

[9] H.Moriya, Variational principle and the Dynamical Entropy, *in preparation.*

[10] H.Narnhofer, Free energy and the dynamical entropy of space translation, *Rep.Math. Phys.*, **25**(1988), 345-356.

[11] H.Narnhofer and W.Thirring, Dynamical Entropy of Quasifree Automorphisms *Lett.Math. Phys.*, **14**(1987), 89-96

[12] H.Narnhofer and W.Thirring, Dynamical Entropy and the Third Law of Thermodynamics *Lett.Math. Phys.*, **15**(1987), 261-273.

[13] M.Ohya and D.Petz , *Quantum Entropy and Ite Use* , Springer, Berlin, Heidelberg, New York , 1993.

[14] Y.M. Park, Dynamical Entropy of Generalized Quantum Markov Chains *Lett. Math. Phys.* **32**(1994), 63-74.

[15] D.W. Robinson, Statistical Mechanics of Quantum Spin Systems. II *Comm. Math. Phys.* **7**(1968), 337–348.

[16] D.Ruelle, A variational formulation of equilibrium statistical mechanics and the Gibbs phase rule. *Comm. Math. Phys.* **5**(1967), 324–329.

[17] B.Simon, *The Statistical Mechanics of Lattice Gases* Princeton University Press, 1993.